DODATEK DO ROCZNIKA POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO T. XXI

SPRAWOZDANIE
Z V ZJAZDU MATEMATYKÓW POLSKICH
W KRAKOWIE W DNIACH 29—31 MAJA 1947

ORAZ

Z AKADEMII POŚWIĘCONEJ UCZCZENIU PAMIĘCI PROF. STANISŁAWA ZAREMBY

KRAKÓW 1950

INSTYTUT MATEMATYCZNY UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
UL. Św. JANA 22

DODATEK DO ROCZNIKA POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO T. XXI

SPRAWOZDANIE
Z V ZJAZDU MATEMATYKÓW POLSKICH W KRAKOWIE W DNIACH 29—31 MAJA 1947
ORAZ
Z AKADEMII POŚWIĘCONEJ UCZCZENIU PAMIĘCI PROF. STANISŁAWA ZAREMBY

KRAKÓW 1950

INSTYTUT MATEMATYCZNY UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
UL. Św. JANA 22

INSTYTUT MATEMATYCZNY UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO — KRAKÓW 1951
Nakład 500 egz. — Papier drukowy sat. b/drzewny 70 × 100 cm, 80 gr — ark. druku 2 3/4
Drukarnia Uniw. Jagiell. Kraków, Czapskich 4 Zam. 555 — 8. XII. 1950
Druk ukończono w maju 1951 M-1-11622

SPIS RZECZY

SPRAWOZDANIE
Z V ZJAZDU MATEMATYKÓW POLSKICH
w dniach 29—31 maja 1947

Organizacja Zjazdu. V-ty Zjazd Matematyków Polskich został zorganizowany przez Oddział Krakowski Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

Do Komitetu Organizacyjnego weszli F. Leja jako przewodniczący oraz A. Bielecki, S. Gołąb, T. Ważewski i W. Wrona. Główny ciężar prac organizacyjnych spoczął na barkach sekretarza Zjazdu dra A. Bieleckiego. Wielką pomoc w organizacji Zjazdu oddali asystenci i studenci matematyki.

Na posiedzeniu Zarządu Oddziału Krakowskiego Polskiego Towarzystwa Matematycznego ustalono termin Zjazdu (29—31 maja 1947) i postanowiono, że posiedzenia odbywać się będą w trzech sekcjach, a mianowicie w Sekcji A, w Sekcji B i w Sekcji Dydaktycznej. Na tymże posiedzeniu postanowiono urządzić w czasie Zjazdu uroczystą Akademię poświęconą uczczeniu pamięci profesora Stanisława Zaremby.

LISTA UCZESTNIKÓW ZJAZDU

A. Alexiewicz (Poznań), T. Banachiewicz (Kraków), A. Bielecki (Kraków), M. Biernacki (Lublin), J. Bonder (Gliwice), K. Borsuk (Warszawa), J. Burzyński (Kraków), Z. Butlewski (Poznań), Z. Charzyński (Warszawa), G. Choquet (Paryż), A. Chromiński (Kraków), R. Cieślewski (Chorzów), A. Ciopa-Śniatyński (Toruń), S. Drobot (Wrocław), Z. Frydrych (Kraków), M. Gindifer (Warszawa), S. Gołąb (Kraków), Józef Górski (Kraków), H. Milicer-Grużewska (Warszawa), S. Hartman (Wrocław), V. Hlavatý (Praga), S. Hławiczka (Biała), B. Iwaszkiewicz (Wrocław), R. S. Ingarden (Wrocław), W. Jankowski (Poznań), V. Jarník (Praga), S. Jaśkowski (Toruń), L. Jeśmanowicz (Toruń), E. Karaśkiewicz (Poznań), B. Knaster (Wrocław), Z. Krygowska (Kraków), W. Krysicki (Łódź), M. Krzyżański

(Kraków), K. Kuratowski (Warszawa), R. Leitner (Kraków), F. Leja (Kraków), J. Leray (Paryż), J. Leśniak (Kraków), S. Łojasiewicz (Kraków), E. Marczewski (Wrocław), S. Mazur (Łódź), J. Mikusiński (Lublin), Z. Moroń (Wrocław), A. Mostowski (Warszawa), W. Nikliborc (Warszawa), M. Nosarzewska (Wrocław), W. Orlicz (Poznań), E. Otto (Łódź), J. Perkal (Wrocław), W. Pogany (Kraków), Ś. Romanowski (Kraków), S. Sedlak (Katowice), Ź. Siedmiograj (Kraków), W. Sierpiński (Warszawa), R. Sikorski (Warszawa), L. Stankiewicz (Kraków), J. Słupecki (Lublin). H. Steinhaus (Wrocław), S. Straszewicz (Warszawa), J. Szarski (Kraków), W. Szmielew (Łódź), Z. Szmydt (Kraków), W. Ślebodziński (Wrocław), T. Ważewski (Kraków), W. Wrona (Kraków), Z. Zahorski (Kraków), K. Zarankiewicz (Warszawa), E. Żyliński (Gliwice).

Program Zjazdu. Program Zjazdu był następujący:

29 V 1947. Dwa posiedzenia Sekcji A od godz. 8-ej i od godz. 16-ej oraz jedno posiedzenie Sekcji B od godz. 8-ej.

30 V 1947. Posiedzenia Sekcji Dydaktycznej od godz. 8-ej i od godz. 18-ej.

Akademia poświęcona pamięci profesora Stanisława Zaremby w Auli Uniwersytetu Jagiellońskiego o godz. 11-ej.

Posiedzenie Sekcji B od godz. 16-ej.

O godz. 18-ej odbyło się posiedzenie Zarządu P. T. M. oraz posiedzenie Jury w sprawie nagród naukowych.

31 V 1947. Posiedzenie Sekcji A od godz. 8-ej i od godz. 16-ej. Posiedzenia B i Sekcji Dydaktycznej od godz. 8-ej.

Walne Zebranie P. T. M. o godz. 11-ej.

O godz. 18-ej nastąpiło zamknięcie Zjazdu.

Obrady odbywały się w lokalu Instytutu Matematycznego Uniwersytetu Jagiellońskiego przy ul. św. Jana 22, II p.

Akademia poświęcona uczczeniu pamięci profesora Stanisława Zaremby.

W Auli Uniwersytetu Jagiellońskiego zebrali się w dniu 29 V 1947 przedstawiciele Władz z Wojewodą drem K. Pasenkiewiczem, uczestnicy Zjazdu, goście zagraniczni z Czechosłowacji, Francji i Włoch, koledzy i uczniowie Zmarłego, młodzież oraz licznie zgromadzona publiczność.

Uroczystość zagaił Rektor Uniwersytetu Jagiellońskiego prof. dr Franciszek Walter wygłaszając następujące przemówienie:

Pochwała matematyki

Czcząc człowieka zasłużonego i oceniając jego charakter, te same uczucia i te same myśli ożywiają wszystkich, którzy pamięć o nim pragną wskrzesić. Nic więc dziwnego, że słowa, którymi mówcy starają się odtworzyć wspomnienia o życiu i czynach zasłużonego męża wykreślonego już z szeregów żyjących podobne są tym, jakimi czczono zawsze prace i dzieła ich życia. Zasługi uczonego przypominane w chwilach uroczystych wspomnień, podobnych dzisiejszej, muszą podkreślać to wszystko, co wspominany przez całe swe życie zdziałał dla nauki. Oddając się bolesnym wspomnieniom o niebycie tego, którego żałujemy, kierujemy równocześnie myśli nasze i spojrzenia w przyszłość, wypatrując tej dalekiej i żmudnej drogi, którą postępował i która również nas czeka. Rozumiemy bowiem, czym jest strata towarzysza i wyznawcy tychże samych ideałów, którym służymy, od chwili, kiedy zrozumieliśmy i pokochali piękność wiedzy, potęgę tajemnic natury i szlachetną wartość prawdy. Powołanie wewnętrzne każe nam poznawać i rozważać tajemnice natury, bo przecież ona jest mistrzynią tego wszystkiego, czegośmy się na drodze poszukiwania prawd nauki nauczyli. Związani wspólnymi ideami, tworząc wspólną gromadę postanawiamy również gorliwie służyć w imię nauki własnemu narodowi. Chcemy iść razem naprzód z tymi, którzy zdobywają wiedzę, chcemy korzystać z tych wszystkich zdobyczy, które myśl ludzka odsłoniła i posiadła, chcemy uczestniczyć w tym wspaniałym pochodzie zdążającym do zdobycia najwspanialszych osiągnięć w zakresie prawdziwej wiedzy, wielkiej kultury, szczęścia niewysłowionego i bezkresnego bogactwa, jakie stwarza myśl ludzka. Pragniemy uczyć się nieprzerwanie narówni z innymi, chcemy pomagać drugim ucząc ich, aby przyczynić się do postępu, do rozkwitu ludzkości a z nią i naszego narodu. Musimy bowiem spełnić ciążący na nas obowiązek poszukiwaczy prawdy, obowiązek spełniania nakazów, kształtowania i urabiania przyszłych pokoleń.

Rozpoczynając ten pochód na drodze, którą wytyczyło nam przeznaczenie, czyż możemy zapomnieć o tych, którzy przed nami torowali drogę wiodącą do poznania prawdy, o tych,

którzy kładli podstawy pod budowę gmachu polskiej nauki. Strata ich okryła nas żałobą. Do nich zwracamy się myślą budząc pamięć serdeczną my, od nich zmarłych szczęśliwsi, bo kroczymy tym torem, który oni wykuwać zaczęli. Idziemy w wspólnej gromadzie, kroczymy w zespole uzbrojeni jednolitą bronią wiary w ideały nasze i konieczność zdobycia potężnych tajemnic natury, li tylko na usługi dobra i szczęścia ludzkiego. Broń nasza jest potężna i góruje nad chaosem i zamętem życiowym.

Przywiodła nas dziś w progi te myśl o mężu, którego zasługi dla nauki, a w szczególności dla matematyki były doniosłe. Matematyczne prace prof. Stanisława Zaremby zyskały mu światową sławę. Był pierwszym spośród twórców nowoczesnej matematyki polskiej, pierwszym pionierem jej modernizacji. Matematyce polskiej oddał niespożyte zasługi wychowując wielu wybitnych mężów i tworząc dzieła nacechowane głębokim spojrzeniem filozoficznym. Prace jego uznane w świecie, wyróżniane i nagradzane były przez Paryską Akademię Nauk. W uznaniu Jego wielkich zasług Uniwersytet Jagielloński nadał mu swą najwyższą godność, tytuł doktora honoris causa. W historii polskiej nauki i w historii naszego Uniwersytetu wśród sławnych nazwisk Wojciecha z Brudzewa, Jana z Głogowa, Jana Brożka, poprzez Józefa Hoena-Wrońskiego i tylu, tylu innych — imię Jego jaśnieje pełnym blaskiem. Toteż taką samą drogą, jaką kroczył Stanisław Zaremba, dążyć musi polska matematyka.

Nie od dzisiejszego dnia prawd rządzących materią poszukuje myśl ludzka. Szukała je na różnych drogach od wielu stuleci. W naukach matematycznych i fizycznych widzimy te wysiłki, widzimy też drogę, na której musi nastąpić uporządkowanie zjawisk i wyodrębnienie ich w postać naturalną i widoczną, wyłaniającą się z mgławicy zjawisk napozór bezładnych. W żadnej nauce nie zdołano ściślej i dokładniej wyrazić ilościowego przebiegu tajemniczych zjawisk natury ani też bliżej ująć w proste sposoby, najzawilszych trudności myśli ludzkiej, jak właśnie w matematyce. Treścią nauki jest poznawanie rzeczywistości. Ono musi być bodźcem tkwiącym stale w nauce i jej ostateczną troską. Takie tylko poznanie jest jej całkowitą wartością. Idąc za myślą Newtona mamy za zadanie i obo-

wiązek, postępując drogą nauki, poznawać i warażać to tylko, co może być wyprowadzone z dostrzeżeń naszych, chociaż pozornie zdawać by się mogło, że siła słów naszych nie nadąży za tajnikami myśli. — A jednak uczyni to matematyka.

A przecież na temat matematyki istnieją różne zapatrywania; jedni świadomi są jej wielkiej korzyści, inni widzą tylko jej ujemne strony. Skądże biorą się te sprzeczne sądy? Matematyka wymaga wysiłków myśli, najcenniejszej wartości ducha ludzkiego, a człowiek niechętnie skłania się do podjęcia zbyt dotkliwego brzemienia. A przecież matematyka to wiedza nie nudna i żmudna, ale cenna w swych owocach, które dla dobra ludzkości potrafiła zdziałać. Ileż na to nasuwa nam codziennie życie dowodów. Czyż zbudowalibyśmy wspaniałe gmachy, którymi chlubimy się, czy stworzylibyśmy wyśnione środki lokomocji na lądzie, wodzie i w powietrzu? Czyż moglibyśmy się rozkoszować pięknem architektury, rzeźby, malarstwa? Kto porusza z posad zdawałoby się na wieczność nieruchome złomy granitowe? Kto układając je, potrafi tchnąć w nie ducha aby do nas przemówiły? To ona wyczarowała budowle starożytności, tumy chrześcijańskie, świątynie na wzór Salomonowej. To ona — matematyka. Kto olśnił myśl Kopernika, kto zmierzył szybkość światła, odległość innych światów, kto odkrył harmonię ich ruchów i kto może utrzymać te olbrzymie światy w ustawicznym ruchu? To ona — matematyka — błogosławiona i wyśniona wiedza, z pomocą której człowiek obdarzony przez Przyrodę twórczym umysłem potrafił wydobyć ze świata jego piękność i jego cudowną harmonię. Najmniejszy błąd, najmniejsze uchybienie w jej niezłomnych kanonach, a runie w gruz najwspanialszy twór ducha i sił ludzkich. Nie gardźmy nią, że jest może przywilejem wybranych, że nie może każdy z nas mimo pracy i znoju posiąść ją i rozkoszować się jej istnieniem. Poznajmy ją, oceńmy jej wielkość i znaczenie, przeniknijmy jej tajniki, aby odczuć rozkosz oglądania piękna i harmonii świata.

Przeszliśmy straszliwe wstrząsy, byliśmy świadkami okrutnych chwil, jakie nauka w rękach szaleńców zgotowała ludzkości. Z lękiem spoglądamy w przyszłość co ona, potężna matematyka może zgotować plemieniu ludzkiemu. Ale wierzymy, że nie będzie ona zdobyczną bronią zbrodniarzy, że nie będzie

użytą na zagładę, klęskę i ostateczną ruinę ludzkości, ale tak jak powstała na chwałę i dla szczęścia ducha ludzkiwgo, tak nadal tym tylko celom służyć będzie.

Wszystko w świecie płynie nieodwracalnie i niespostrzeżenie wczoraj różni się od jutra, nauka jedynie musi być młodą, jako źródło szczęścia dla młodych i starych. Żądając porywów i poświęcenia, wymagając wysiłków zwraca się przede wszystkim do młodych. Znużonym umysłom pozostaje tylko rozmyślanie nad bezmiarem natury i rozkoszowanie się jej ukojeniem cichym i czystym. Nauka nasza promienieje młodością, ale jest też w czynach odważna, nawet gdy jest w swych sądach surowa. Wśród splotu dróg wiodących ku poznaniu prawdy, zaścielonych gęstą mgłą, wśród niestety coraz więcej piętrzących się przeszkód dla tych, którzy drogę tę poznali i pokochali, wieczna mlodość nauki będzie wiernym ich przewodnikiem i użyczy sil na pokonanie trudności — aby mogli jako zwycięzcy powieść ludzkość poprzez harmonię świata i piękno ducha, ku nowej, wspanialej przyszłości. Miejmy podziw dla niej a dla ludzi małych i nie chcących zrozumieć jej doniosłości — wyrozumienie i współczucie.

W imieniu Polskiej Akademii Umiejętności przemówił prof. dr Wacław Sierpiński w następujących słowach:

W imieniu Polskiej Akademii Umiejętności składam hołd pamięci profesora Zaremby. Prof. Zaremba był ściśle związany z Akademią, będąc przez lat 40 jej członkiem, mianowicie od roku 1903 korespondentem Wydziału Matematyczno-Przyrodniczego Akademii, zaś od r. 1926 jego członkiem czynnym. W biuletynach Wydziału III oglosil szereg cennych rozpraw, a pozatem nakładem Akademii wydany został jego podręcznik mechaniki. Prof. Zaremba był też wielokrotnym laureatem P. A. U.

Pierwsze prace profesora Zaremby były ogloszone we Francji i zwróciły na niego uwagę świata naukowego. Stopień doktora otrzymal przed 50-ciu laty na Uniwersytecie Paryskim, a jeszcze dotąd żywa jest pamięć o Nim we Francji, jak mogłem się o tym przekonać w czasie mego niedawnego tam pobytu.

Liczni uczeni francuscy wyrażali żal z powodu śmierci prof. Zaremby i dopytywali się o jej okoliczności.

W osobie profesora Zaremby matematyka polska straciła jednego z najwybitniejszych swych przedstawicieli

Cześć Jego pamięci!

Z kolei przemówił w imieniu nauki francuskiej prof. dr J. Leray z Collège de France podkreślając węzły łączące naukę polską i francuską i na tym tle zobrazował zasługi naukowe profesora Zaremby.

W imieniu Polskiego Towarzystwa Matematycznego przemówił jego prezes prof. dr Kazimierz Kuratowski w następujących słowach:

W imieniu Polskiego Towarzystwa Matematycznego, skupiającego ogół matematyków polskich naukowo pracujących, składam z uczuciem głębokiej czci hołd pamięci znakomitego matematyka, prof. Stanisława Zaremby. Dziś, gdy zebrali się w Krakowie matematycy z całej Polski, przejęci jedną ideą: odbudowy Polskiej Szkoły Matematycznej — myślą przenosimy się ku wielkiemu Uczonemu, który w tak znacznym stopniu przyczynił się do powstania Matematyki Polskiej.

Polskie Towarzystwo Matematyczne szczególnie silnie czuje się związane z osobą prof. Zaremby. Był on jednym z jego założycieli, prezesem i długoletnim jego kierownikiem. Był on bez przerwy redaktorem Rocznika Polskiego Towarzystwa Matematycznego od chwili ukazania się pierwszego zeszytu tego czasopisma aż do ostatniego, wydanego za jego życia, Rocznika. Swoimi publikacjami zasilał łany Rocznika, a dzięki swym stosunkom w świecie naukowym pozyskał dla współpracy wielu wybitnych uczonych zagranicznych i zdobył dla Rocznika P. T. M. poważną pozycję na gruncie międzynarodowym.

Okres najświetniejszych odkryć prof. Zaremby, odkryć z dziedziny równań różniczkowych i teorii potencjału, przypada na pierwszą dekadę tego wieku. Jest to okres niewoli. Okres, gdy nieliczni, rozproszeni matematycy polscy nie tworzą — tak

jak dziś — zespołu, lecz pracują odosobnieni. Tym większa zasługa uczonego, który w niesprzyjających warunkach potrafił tak wielkich odkryć dokonać.

Z innego jeszcze względu zasługi prof. Zaremby z tego okresu szczególnego waloru nabierają. Lata niewoli poprzedzające pierwszą wojnę światową, to lata, gdy młodzież z całej Polski garnie się poprzez kordony graniczne po wiedzę i naukę do Krakowa, do prastarej Uczelni, która promieniuje na cały kraj i pobudza twórczość naukową wszędzie, dokąd dociera. Swoją działalnością naukową, ściśle zespoloną z Uniwersytetem Jagiellońskim, prof. Zaremba w wielkim stopniu przyczynił się do twórczości innych uczonych, zwłaszcza młodych, wkraczających na drogę naukową, matematyków. Jest to szczególnym powodem głębokiej dla Niego czci naszej i wdzięczności.

Następnie prof. dr Franciszek Leja dał obraz prof. Zaremby jako człowieka o wielkich zaletach charakteru, o szerokim zasięgu zainteresowań nie tylko naukowych lecz także politycznych i społecznych. Podkreślił następnie zasługi Stanisława Zaremby jako pedagoga i wychowawcy całego szeregu polskich matematyków.

Wreszcie prof. dr Tadeusz Ważewski zanalizował twórczość i zasługi naukowe Stanisława Zaremby w następującym przemówieniu:

Problemy matematyczne wywodzące się z potrzeb fizyki były od wczesnej młodości przedmiotem zainteresowań Zaremby.

Jeszcze podczas studiów technicznych w Rosji musiał im niewątpliwie poświęcić wiele uwagi, skoro po przyjeździe do Francji, w uderzająco krótkim czasie zdołał uzyskać doniosłe wyniki z tego zakresu.

Przedmiotem jego badań były przede wszystkim równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego. Dział ten ma ogromne zastosowanie w fizyce. Powstał on niemal równocześnie z epokowymi odkryciami Newtona, z odkryciem praw dynamiki i z wynalazkiem rachunku różniczkowego i całkowego. Równania cząstkowe rzędu drugiego rozpadają się na trzy typy:

eliptyczny, hyperboliczny i paraboliczny. Z punktu widzenia fizycznego odpowiadają one z jednej strony zjawiskom równowagi lub ruchu stacjonarnego, zjawiskom ruchu zwłaszcza falowego z drugiej i wreszcie zjawiskom cieplnym. Podstawowe prawa i problemy z zakresu teorii elektryczności i magnetyzmu wyrażają się również w języku tych równań.

Specjalnie ważnym ich gatunkiem są równania liniowe. Nic więc dziwnego, że były one przedmiotem badań najświetniejszych umysłów wielu pokoleń.

Miarą doniosłości i trudności zarazem tych zagadnień, jest fakt, że szereg najwyższych instytucji naukowych obierało je za temat swych konkursów. W r. 1858 Akademia Nauk w Paryżu wystąpiła z tego rodzaju konkursem. Problem dotyczył wyznaczenia stanu cieplnego nieograniczonego ośrodka jednorodnego. W r. 1861 genialny matematyk Riemann przedstawił Akademii rozprawę poświęconą temu zagadnieniu. Rozprawa ta nie została jednak nagrodzona, gdyż szkicowane dowody nie miały siły przekonywującej.

Istotny postęp na drodze do rozwiązania problemu przyniosła dopiero 30 lat później, bo w r. 1889, rozprawa doktorska Zaremby. Stwierdził on, że obok rozwiązań wskazanych przez Riemanna istnieje cały szereg dalszych rozwiązań oraz podał poprawne dowody dla przypadków rozpatrywanych przez Riemanna i większości pozostałych.

Tak świetny debiut zwrócił uwagę ówczesnego świata naukowego na młodego Polaka i ułatwił mu kontakt z najwybitniejszymi matematykami francuskimi.

Nadzieje wiązane z tym młodym talentem potwierdziły się w zupełności. Po pracy doktorskiej nastąpił szereg prac o znaczeniu fundamentalnym.

Wchodzenie w szczegóły dotyczące nawet najważniejszych prac jest niemożliwe na tym miejscu.

Ograniczę się więc do zwrócenia uwagi na cechy najbardziej charakterystyczne dla twórczości profesora Zaremby.

W rozwoju różnych gałęzi matematyki zdarzają się okresy pewnego zahamowania, okresy, w których droga naprzód musi być z trudem rąbana w terenie skalistym, a nikłość wyników nie odpowiada ogromowi wysiłków i liczbie pracowników, mimo, że cel jest dokładnie określony.

Zjawisko to daje się obserwować na różnych terenach matematyki. Na różnych odcinkach tej samej dziedziny trwa ono niekiedy bardzo długo. Otóż zdarza się, że inwencja twórcza jednego człowieka usuwa od razu trudności. Podaje on nie tylko metody prowadzące szybko do celu, ale otwiera często nowe tereny badań i zainteresowań. Pomysł taki uderza zazwyczaj swą prostotą, a tajemnica jego skuteczności polega na ujęciu problemu z niespodziewanej strony.

Pomysły takie bywają przede wszystkim udziałem umysłów obdarzonych zdolnością głębokiego filozoficznego spojrzenia na naturę problemu.

Typowym przykładem tego rodzaju odkrywcy jest Henryk Lebesgue, autor przełomowych i przy tym uderzająco prostych pomysłów na terenie różnych dziedzin matematyki.

Otóż w zakresie równań liniowych typu eliptycznego autorem takiego przełomowego pomysłu jest prof. Zaremba.

Pomysł ten doprowadził go do szeregu fundamentalnych wyników. Ogłosił je w całej serii prac zasadniczych dla tej gałęzi badań. Na tej drodze między innymi odkrył fakt, że rozwiązania pewnych zagadnień brzegowych zależą od wartości własnych problemu i dają się rozwijać w pewne szeregi funkcyj ortogonalnych.

Genialny matematyk francuski Poincaré przeczuwał, że taka własność powinna mieć miejsce, lecz dopiero Zarembie zawdzięczamy ustalenie tego faktu.

Poincaré opublikował w Bulletin des Sciences Mathématiques obszerną analizę prac Zaremby i rozwinął jednocześnie idee wskazane przez Zarembę, a zamieszczone w nocie przedstawionej Krakowskiej Akademii Umiejętności w r. 1901.

Wyniki Zaremby z zakresu teorii potencjału i funkcji harmonicznej są klasyczne, to też zamieszczają je wszystkie podręczniki z tego zakresu.

Około roku 1910 Zaremba zwrócił się do badań nad równaniem biharmonicznym. Prace jego na ten temat zostały ukoronowane przez Paryską Akademię Nauk.

Na osobną uwagę zasługuje epokowe, a pośród niespecjalistów przedmiotu niedość znane odkrycie Zaremby w dziedzinie równań typu hyperbolicznego.

Zarembie mianowicie zawdzięczamy pomysł stanowiący podstawę do wprowadzenia nierówności różniczkowych jako metody badań na tym terenie.

Zasadniczy dla literatury przedmiotu podręcznik Hilberta i Couranta poświęcony metodom fizyki matematycznej wyraźnie podkreśla, że pierwsza myśl pochodzi od Zaremby, a późniejsze m. in. sławne nierówności Friedrichsa są wynikiem rozwinięcia idei zarembowskich. Możności oparcia się o zarembowską zasadę zawdzięczamy więc w wysokim stopniu to, że teoria równań hyperbolicznych wchodzi obecnie na nowe tory i może czerpać metody z innych dziedzin jak np. z topologii i teorii funkcji zmiennych rzeczywistych.

Podobnie jak prace na temat równań trzech typów, tak też i pozostałe badania Zaremby wiążą się najściślej z fizyką. Wymienić tu należy prace dotyczące teorii relaksacji, podwójnego załamania światła w cieczach, pewnych równań funkcyjnych w fizyce, prace dotyczące hydrodynamiki, elastomechaniki i elektrodynamiki.

Tuż przed wojną rozmawiałem na temat prac Zaremby z profesorem Lebesgue'iem, który był wtedy w Krakowie. Wyraził się on, że Zaremba nie ogłosił żadnej pracy niepotrzebnie. Istotnie Zaremba nie ogłaszał przyczynków. Prace jego to prace o wysokim ciężarze gatunkowym. Wiele z nich ma znaczenie podstawowe i stanowi trwałą wartość w matematyce.

Po objęciu katedry w Krakowie w r. 1900 zastał tu teren, któremu duch nowoczesnej matematyki był niemal zupełnie obcy. Studenci wynosili wtedy ze szkoły średniej o wiele mniej dokładne i troskliwe przygotowanie niż obecnie.

Zaremba zdawał sobie sprawę, że w warunkach tych nie będzie mógł od razu wdrożyć uczniów w swój kierunek badań, a więc w dziedzinę rozwijającą się u szczytów matematyki. Tak było w kraju.

A we Francji miał przecież wspaniałe środowisko matematyczne, doskonałe warunki pracy i wobec tego najlepsze widoki rozwoju swego talentu, co dla naukowca jest zazwyczaj decydujące.

Pokochał Francję i tam założył rodzinę. Mimo to, kierowany gorącym patriotyzmem zdecydował się wrócić do kraju i pracować w charakterze pioniera.

Rozpoczął więc redagowanie skryptów i podręczników. Od szczytów musiał przejść do podstaw.

Powstały w tym okresie: *Zarys pierwszych zasad teorii liczb całkowitych*, obszerna *Arytmetyka teoretyczna* i *Wstęp do Analizy*.

Lektura ich nie była łatwa z pewnych powodów, o których wspomnę później. Stanowiły one wprawdzie twardą, ale za to gruntowną szkołę ścisłości. Co więcej, rozwijały u czytelnika właściwy autorowi zmysł filozoficzny. Autor nie ograniczał się bowiem do podawania czystej teorii. Wyjaśniał powody geometryczne, dla których pewne definicje mają taką a nie inną postać. Uzyskał to m. in. przez rozwinięcie teorii mierzenia odcinków, która zajmuje dużą część *Arytmetyki teoretycznej*.

Czytając ten podręcznik student spostrzegał ze zdumieniem, że dotychczas nie rozumiał dlaczego ułamki mnoży się przez siebie mnożąc z osobna liczniki i mianowniki. Tu dowiadywał się jakie względy geometryczne warunkują koniecznie tę właśnie a nie inną regułę mnożenia.

Na pierwszy rzut oka drobny ten szczegół mógłby się wydać śmiesznym — w tym kontekście. Wskazuje on jednak na to, jak wnikliwy i zdrowy był zmysł pedagogiczny Zaremby i jak głęboko rozumiał psychologię nauczania na terenie szkoły średniej. Przyszłemu nauczycielowi uświadamiał, że w zakresie elementarnego nauczania, formalne definicje mogą łatwo prowadzić do werbalizmu. Uczył tej zdrowej zasady, że młodemu umysłowi ucznia powinno się zawsze wskazywać oparte na intuicji lub oglądzie geometrycznym powody, dla których wprowadza się te właśnie, a nie inne definicje.

Podręczniki Zaremby wywarły głęboki wpływ na umysły młodych naukowców debiutujących w tym okresie. Zaczyn ducha nowoczesnej matematyki zmienił ich sposób patrzenia na tę dyscyplinę i na jej problemy.

Wpływ ten pozostał decydujący nawet wtedy, gdy stali się później specjalistami w innych gałęziach matematyki niż te, które reprezentował Zaremba.

Wychodząc z przekonania, że badania matematyczne mogą osiągnąć pełną wartość naukową jedynie pod warunkiem zupełnej ścisłości, Zaremba zwrócił się do studiowania logiki. Owocem jego rozważań na ten temat jest rozprawa o logice

matematycznej, wydana jako osobny zeszyt w kollekcji „Mémorial des Sciences Mathématiques".

Wynikiem współpracy z prof. Kreutzem było dzieło o podstawach krystalografii geometrycznej: *Sur les fondements de la Cristallographie géometrique*. Różni krystalografowie wychodzili z różnych podstawowych założeń, zgodnych co prawda w wielu punktach, lecz prowadzących do niezgodnych wniosków. Autorowie poddali analizie związek faktów eksperymentalnych z ujęciem geometrycznym i Zaremba dowiódł, że każdą z podstawowych hypotez można tak zmodyfikować, aby uzyskać pełną zgodność. We Francji prof. Hadamard poświęcił analizie tej pracy kilka posiedzeń swojego seminarium. Dzieło to stało się punktem wyjścia pewnych prac krystalografów zagranicznych.

W pracy pt. *La théorie de la relativité et les faits observés* wskazuje Zaremba na pewne trudności związane z teorią względności. Powód do tego artykułu dały pewne faktyczne usterki przy ustaleniu zespołu eksperymentów, stanowiących punkt wyjścia do wyprowadzenia równań Lorentza.

Usterki te prowadziły w tych czasach do wielogodzinnych, nigdy nie uwieńczonych konkretnym wynikiem, dyskusji między fizykami lub między matematykami. Dyskusje takie można było często obserwować pod koniec pierwszej wojny światowej.

Otóż cechą teorii fizycznych, odznaczających się wystarczającym opracowaniem przejścia od materiału eksperymentalnego do ujęcia matematycznego, jest łatwa komunikowalność ich ludziom krytycznym, mającym pewne minimum przygotowania matematycznego. Dzisiaj coraz częściej podaje się tak zmodyfikowane ustalenie zespołu wspomnianych eksperymentów, że nawet człowieka o słabym wyczuciu fizycznym, można łatwo przeprowadzić poprzez barierę oddzielającą świat newtonowski od czasoprzestrzeni Einsteina.

Z zestawienia tego jasno wynika, że wystąpienie Zaremby było zupełnie uzasadnione.

Należy podkreślić dla uniknięcia nieporozumień, że omawiany artykuł nie miał na celu obalania teorii względności i że autor wcale nie przesądzał, czy nie będzie można pokonać trudności, na które słusznie wskazał.

Ostatnim dziełem Zaremby był *Zarys mechaniki teoretycznej*. Dwa jego tomy ukazały się przed wojną. Ostatni kończył podczas wojny. Rękopis został złożony w Polskiej Akademii Umiejętności.

Mechanika Zaremby jest czymś więcej aniżeli zwykłym podręcznikiem. Jest ona dziełem zbyt głębokim na to, aby się mogła stać popularnym w szerokich kołach studentów podręcznikiem uniwersyteckim.

Wykładający mechanikę wiedzą, jak trudno wydzielić te jej partie, które są matematycznym ujęciem koncepcji opartych bezpośrednio na eksperymencie. Wykładający obdarzony spojrzeniem przyrodniczym i pewną dozą krytycyzmu, zauważa, że w pewnych partiach wykładu potocznie przyjmowane zasady mechaniki nie wystarczają, że w sposób nieuchwytny i trudny do sprecyzowania czerpie się milcząco coś więcej z doświadczenia. Co więcej nie uchodzi to uwagi inteligentniejszych studentów. Interpelowany profesor, który nie chce decydować się na odpowiedź ogólnikową, ani też demoralizować młodych umysłów odwoływaniem się do autorytetu, musi często wyznać swą bezradność. Może to np. mieć miejsce przy omawianiu tzw. zasady prac wirtualnych.

Zaremba dzięki swemu wyjątkowemu zmysłowi fizycznemu i pełnemu krytycyzmu spojrzeniu filozoficznemu na stosunek matematyki do przyrody, potrafił wiele tego rodzaju trudności ujawnić i wyświetlić. Pewne zamaskowane dotąd postulaty mechaniki zdołał w ten sposób wyprowadzić na światło dzienne. Dlatego też, zdaniem moim podręcznik ten jest niezmiernie cennym źródłem dla wykładających mechanikę. Należy więc pragnąć, aby ostatni jego tom ukazał się jak najprędzej.

Przejdźmy z kolei do cech, które charakteryzują Zarembę jako uczonego. Najbardziej istotną jego cechą był jak już wspomniałem dar głębokiego, filozoficznego spojrzenia na naturę problemu. Ta tak rzadko, nawet wśród uczonych dużej miary, spotykana zdolność, jest głównym źródłem jego sławy. Dzięki niej na drodze nieoczekiwanie prostej i jasnej potrafił porać się z problemami, które uchodziły za ogromnie zawiłe. Dzięki niej konstruował nowe metody i otwierał nowe kierunki badań. Dysponując szeroką i gruntowną erudycją, mógł tym łatwiej

odkrywać, pomiędzy odległymi pojęciowo zagadnieniami, analogie, które uchodziły uwagi innych badaczy.

Posiadał wyjątkowy dar ujmowania zawiłych twierdzeń łącznie z szeregiem niezbędnych założeń, za pomocą jednego chwytu myśli. Myślał i rozumował niejako całymi konglomeratami, znacznie bogatszymi aniżeli się to obserwuje zazwyczaj. Zaleta ta była niewątpliwie powodem charakterystycznej dlań zdolności i tendencji tworzenia długich, niekiedy bardzo długich okresów zdaniowych. Osobom słuchającym po raz pierwszy jego wykładu sprawiało to początkowo dużą trudność. Było to również powodem pewnych trudności dla czytelnika na początku lektury jego podręczników. Na ogół jednak młodzi ludzie oswajali się szybko z jego swoistym stylem. Bliska i uważna analiza tych długich okresów musi budzić podziw ze względu na konsekwencję logiczną i gramatyczną ich budowy.

Ta zdolność w operowaniu konglomeratami musiała niewątpliwie odegrać dużą rolę w jego osobistej pracy badawczej i stanowi jeden z charakterystycznych rysów jego twórczości.

Wiadomo, że u większości matematyków intuicja geometryczna jest głównym źródłem nowych pomyślów. Znacznie rzadziej spotyka się matematyków, o rozwiniętej intuicji kinematycznej. Intuicja fizyczna natomiast, jako motor badawczej myśli matematycznej jest przywilejem nielicznej garstki. Ten cenny dar posiadał Zaremba, jako jeden z niewielu wyjątków na naszym terenie.

W wyborze tematu był ogromnie troskliwy. Nie podejmował problemów, które go chwilowo zaciekawiały. Był głęboko przekonany, że ostatecznym celem matematyki są zastosowania, a w szczególności upatrywał w niej jedno z najważniejszych narzędzi do badania przyrody nieożywionej. To też niemal wszystkie te jego prace, które dały mu tytuł do sławy i które stanowią i stanowić będą trwałą wartość, dotyczą zagadnień wywodzących się z fizyki.

Umysł tej miary nie mógł oczywiście w najmniejszym stopniu podzielać opinii ludzi, którzy wartość osiągnięć matematycznych mierzą wyłącznie ich bezpośrednią stosowalnością dla celów praktycznych. Przeciwnie, uznawał doniosłość rozwoju matematyki czystej. Upatrywał w niej źródło, z którego

matematyka fizyczna i stosowana będą mogły czerpać nowe, skuteczne narzędzia badań i nowe metody.

W Polsce powstały na początku bieżącego stulecia dwie nowe, żywotne szkoły, warszawska i lwowska, które przeżywały wtedy swój okres bohaterski, a bogactwem problemów oraz nowością metod i niezwykłością wyników pociągały umysły również niektórych matematyków krakowskich.

Profesor Zaremba odnosił się życzliwie do badań tych młodych ludzi, czytał manuskrypty z właściwym sobie krytycyzmem i wielokrotnie przez swe głębokie uwagi wpływał na tok tych badań.

Był tytanem pracy i uosobnieniem żywotności. Dowodzi tego fakt, że pisanie obszernych podręczników nie wywołało przerwy w jego osobistych dociekaniach badawczych. Pracować potrafił w każdej sytuacji. Nawet ciężkie przeżycia związane z okupacją niemiecką nie zdołały go oderwać od pracy nad redakcją *Zarysu mechaniki teoretycznej*.

O wpływie wychowawczym Zaremby napomknąłem już omawiając znaczenie jego *Arytmetyki*.

Wykłady uniwersyteckie Zaremby imponowały studentom jako wzór ścisłości. Propagowanie idei ścisłości w epoce tworzenia się nowoczesnej matematyki polskiej było wielką zasługą pedagogiczną. Wykład opracowany do najdrobniejszych szczegółów nie pozostawiał żadnych luk i niedomówień.

Odstraszał tych studentów, którzy nie byli w stanie ująć swej myśli w karby dyscypliny logicznej. Wykład ten dozowany właściwymi Zarembie konglomeratami, wymagał starannego opracowania, zwłaszcza na początku, gdy student nie zdołał się jeszcze oswoić ze specyficznym stylem Profesora.

Proponowane przezeń tematy ćwiczeń były doskonale dobrane i zawsze bardzo pouczające. Wielokrotnie były to tematy dość trudne i wymagały od studenta wiele pracy osobistej. Bezcenną ich zaletą było to, że wyrabiały samodzielność myślenia i kształciły fantazję twórczą. Przy opracowaniu tematu w domu, należało przemyśleć dobrze wszystkie szczegóły, Profesor bowiem przyjmował podczas ćwiczeń do wiadomości tylko to, co było gruntownie uzasadnione. Nie dał się sugerować. Krytykował życzliwie, ale bez ogródek. Żadne przeoczenie nie uszło jego uwagi. Minimum wymagań

przy egzaminach poniżej którego nie schodził, było wysokie. Dla uczniów mających wtedy na ogół słabe przygotowanie z gimnazjum, była to twarda, ale jakże skuteczna szkoła.

Był długoletnim kuratorem Kółka Matematyczno-fizycznego uczniów U. J. Dowodem uznania młodzieży za pracę na tym terenie było nadanie mu tytułu członka honorowego tej organizacji.

Młodych naukowców otaczał specjalną opieką. Łatwo przystępny, naturalny, wolny od śladów koturnowości służył im wskazówkami, życzliwą radą i pomocą.

Mając szerokie stosunki w naukowych kołach zagranicznych, gościł u siebie często matematyków obcych. Przy okazji tej nie omieszkał zaprosić żadnego z młodych miejscowych matematyków, również tych nielicznych, którzy wyraźnie nie okazywali mu sympatii.

Zaremba był człowiekiem twardych, bezkompromisowych zasad. Nie owijał swego sądu w bawełnę, wypowiadał się wprost i nie używał dróg kuluarowych. Był prostolinijny. Jeżeli jakąś sprawę lub tezę uważał za słuszną, starał się ją przeprowadzić z otwartą przyłbicą, nie myśląc o tym, że postępowanie takie może mu przysporzyć kłopotów. Kierował się zawsze interesem matematyki, nie dając się powodować względom ubocznym.

Omówione powyżej zasługi Zaremby nie wyczerpują całokształtu jego działalności. Jego udział w reformie studiów i we wprowadzeniu systemu magisterskiego zaważył w konsekwencji silnie na podniesieniu poziomu szkolnictwa średniego.

Był współzałożycielem Polskiego Towarzystwa Matematycznego oraz twórcą i długoletnim redaktorem jego organu „Annales de la Société Polonaise de Mathématique". Czasopismo to wraz z polskimi periodykami „Fundamenta Mathematicae" i „Studia Mathematica" jest znane i cenione w całym świecie matematycznym.

Zaremba posiadał, jak już wspomniałem, rozległe stosunki wśród matematyków wszystkich krajów. Dzięki temu przyczynił się wybitnie do nawiązania bezpośrednich kontaków z matematyką zagraniczną, oddając przez to nieocenioną usługę sprawie rozwoju matematyki polskiej.

Był pierwszym spośród twórców matematyki polskiej, pierwszym spośród pionierów jej modernizacji.

Wyrazem jednomyślnego uznania jego zasług przez cały świat matematyczny polski jest fakt, iż obecnie jedną z wielkich nagród matematycznych nazwano jego imieniem.

Nasuwa się pytanie: Czy w chwili obecnej dorobek naukowy Zaremby należy do wartości przebrzmiałych i czy może stanowi on już tylko świetną kartę w historii matematyki polskiej?

W związku z tym pytaniem pozwolę sobie przytoczyć fragmenty listów przysłanych na ręce komitetu organizującego uroczystości jubileuszowe w r. 1930, uroczystości związane z nadaniem Zarembie doktoratu honorowego przez Uniwersytet Jagielloński.

Henryk Lebesgue, członek Paryskiej Akademii Nauk, profesor Collège de France pisze m. in.:

„*Aktywność naukowa Zaremby zaważyła na tak wielu terenach badań, że nazwisko jego nie może być obce nikomu, kto się interesuje matematyką. Wydaje mi się jednak, że przede wszystkim ci będą mogli ocenić w pełni potęgę kreowanych przezeń metod i swobodę jego fantazji twórczej, którzy zajmowali się specjalnie równaniami fizyki matematycznej. Tam okazał swój styl, tam imię jego zapisało się na zawsze*".

Tak pisał Lebesgue, który jak wiadomo wcale nie lubiał szafować komplementami.

A oto wyjątek z listu Hadamarda, członka Paryskiej Akademii Nauk, profesora École Polytechnique i Collège de France:

„*Jakże nie wspomnieć o ideach, które tchnął w dziedzinę badań należącą do terenów, którym nauka francuska bieżącego stulecia poświęciła najwięcej wysiłków. Głębokie, pochodzące odeń uogólnienie przekształciło niedawno podstawy teorii potencjału i stało się natychmiast punktem wyjścia do badań młodych matematyków szkoły francuskiej. Uogólnienie to, w stopniu naprawdę nieoczekiwanym w tej dziedzinie, posiada znamię tej prostoty i elegancji, które cechują idee trafnie i głęboko ujmujące istotę rzeczy. A o ile chodzi o moją specjalność, czyż mógłbym nie pamiętać pięknych rezultatów z zakresu mieszanych problemów*

brzegowych, z zakresu funkcji harmonicznych, jako też z zakresu równań hyperbolicznych, badań, przez które otworzył drogi, jakimi wiedza współczesna pójdzie w najbliższym okresie".

Przytoczę w końcu urywek przemówienia reprezentanta Szkoły Warszawskiej Stanisława Saksa, który zginął w czasie wojny z rąk hitlerowskich.

„*...Ale mogę — możemy my wszyscy — wyrazić swój podziw dla wyników Twej twórczości, wyrazić wdzięczność za to, że jeden z najpiękniejszych rozdziałów Analizy — któreś przeorał pługiem Swej wiedzy i Swego talentu — uczynił bardziej jasnym i bardziej dostępnym. Boć to, co właściwością jest niemal wszystkich odkryć naukowych wyróżniało i Twoje, Panie, prace: ścisłość i ogólność synonimem w nich były prostoty i jasności.*

Jesteś, Panie, zresztą nie tylko Naszym Nauczycielem. Byłeś jednocześnie organizatorem Nauki Polskiej. Tu, w cieniu najstarszej z wszechnic naszych, założyłeś Polskie Towarzystwo Matematyczne, które pokrywa dziś siecią swych oddziałów wszystkie miasta uniwersyteckie Polski. I niechaj w imieniu Oddziału Warszawskiego będzie mi wolno złożyć Ci hołd powinny — hołd pełen wdzięczności".

Profesor Zaremba mieszkał zdala od gwaru miejskiego, na peryferiach miasta w zaciszu Czerwonego Prądnika.

Najbliższym świadkiem jego wielkiej twórczości, jego najlepszym przyjacielem, serdecznym opiekunem jego warunków pracy była profesorowa Zarembina.

Humanistka z wykształcenia czytywała wspólnie z nim w chwilach wytchnienia i dyskutowała utwory klasyków, monografie historyczne, dzieła traktujące o historii kultury i nauki oraz rozprawy rzucające światło na naturę człowieka.

Obdarzona czarującą inteligencją, pełna dystyngowanej subtelności była promieniem słońca w jego życiu.

Dziś sama, w trudnych warunkach, żyje pamięcią najdroższego towarzysza, wielkiego człowieka.

W szpitalu, krótko przed śmiercią, interesował się żywo sytuacją wojenną. Na całej przestrzeni lat, dostępnej naszym oczom, był niezmiennym w swym stosunku do metod przemocy. Z radością przyjmował wiadomości prasy podziemnej

o niepowodzeniach hitlerowskich. Gorący w swym patriotyzmie nie wątpił nigdy w zwycięstwo słusznej sprawy.

Gdy parę dni później wczesnym popołudniem jesiennym staliśmy nad otwartą mogiłą, na trumnie widniały przypięte ręką kobiecą dwie róże, biała i czerwona.

Dla oczu naszych były one nie tylko symbolem hołdu dla profesora.

Widzieliśmy w nich znak naszej dumnej afirmacji wobec wroga, oraz wyraz protestu przeciw gwałceniu praw kulturalnych narodu, który wydaje ludzi tej miary.

Na cmentarzu rakowickim, na skromnym grobie, tkwi prosty, drewniany krzyż z napisem: *Stanisław Zaremba, Matematyk.*

Przechodzień nie domyśla się, ile głębokiej treści mieści się w tych trzech słowach: Stanisław Zaremba, Matematyk.

REFERATY W SEKCJACH

Sekcja A.

1. W. Sierpiński. *O pewnych układach wyznaczających* (por. artykuł *Sur certains systèmes déterminants*, Actas de la Acad. Nacional de Ciencas Exactas, Fisicas y Naturales de Lima, t. X, str. 17—23).

2. W. Orlicz. *O pewnej klasie ciągów funkcyjnych rozbieżnych asymptotycznie.*

3. A. Alexiewicz. *O mnożeniu szeregów nieskończonych* (por. artykuł *On multiplication of infinite series*, Studia Mathematica, t. 10, str. 105—112).

4. E. Marczewski. *Uwagi o zbieżności asymptotycznej* (por. pracę wspólną z S. Hartmanem: *On the convergence in measure*, Acta Scient. Math. Szeged).

5. J. Mikusiński. *Metody algebraiczne i aksjomatyczne w zastosowaniu do pewnych zagadnień analizy funkcjonalnej* (zob. notę *Les méthodes algébriques dans l'analyse fonctionnelle*, C. R., t. 224, str. 1685—1687).

6. A. Mostowski. *Kilka zastosowań topologii w logice.*

W pierwszej części referatu autor uzasadnia i komentuje następujące twierdzenie: Relacja zachodząca między dwoma wyrażeniami A, B arytmetyki opartej na układzie aksjomatów Peano wtedy i tylko wtedy, gdy wyrażenie *jeśli* A, *to* B jest twierdzeniem arytmetyki, jest izomorficzna z relacją inkluzji w ciele zamknięto-otwartych podzbiorów zbioru Cantora.

W drugiej części autor omawia zastosowania twierdzenia Tychonowa o dwuzwartości produktu przestrzeni dwuzwartych do twierdzenia Skolema-Löwenheima i jego uogólnień.

7. W. Szmielew. *O aksjomatyce i modelach grup abelowych* (por. artykuł *Decision Problem in Group Theory*, Library of the X-th International Congress of Philosophy, Amsterdam 1948, t. I).

8. S. Hławiczka. *Relacjonalna forma arytmetyki*.

9. K. Zarankiewicz. *O przeciwobrazach funkcji ciągłej i zasadzie Dirichleta* (praca ukaże się w Sprawozdaniach Towarzystwa Naukowego Warszawskiego za rok 1948).

10. H. Milicer-Grużewska. *O prawie granicznym*.

Komunikat jest uogólnieniem wyników zreferowanych w r. 1946 w Oddziale Warszawskim P. T. M. (zob. Rocznik P. T. M. 1947). Założenia o istnieniu gęstości praw repartycji oraz o zbieżności jednostajnej ciągu średnich momentów zmiennych zależnych zostały w tym uogólnieniu usunięte.

Dowody zostały uproszczone wskutek udowodnienia następującego ogólnego wyniku:

Oznaczmy przez $x_1, x_2, \ldots$ ciąg zmiennych ewentualnych, $F_1(x), F_2(x), \ldots$ ich prawa repartycji, oraz $M_1^{(p)}, M_2^{(p)}, \ldots$ $(p=1, 2, \ldots)$ ich momenty rzędu p. Jeśli $M_n^{(p)} \to M_p, (n \to \infty,\ p=1, 2, \ldots,)$ oraz szeregi:

$$\sum_1^\infty \frac{|M_n^{(p)}|}{p!}(t)^p, \qquad \sum_1^\infty \frac{|M_n|}{p!}|t|^p, \qquad |t| \leqslant t_0 > 0$$

są zbieżne w otoczeniu zera, to ciąg praw repartycji $F_n(x)$ zbieżny jest do prawa granicznego $F(x)$, wyznaczonego przez momenty M_p w sposób jednoznaczny. Zbieżność ta ma miejsce w punktach ciągłości funkcji $F(x)$.

11. F. Leja. *Pewne kryterium regularności punktów brzegowych w problemie Dirichleta* (por. Ann. Soc. Polon. Math., t. XX, str. 223—228).

12. Z. Zahorski. *O zbiorze punktów nieróżniczkowalności funkcji dowolnej.*

Dana jest funkcja dowolna $f(x)$ (nawet może być niemierzalna L). Określam $\varphi(x)$ tak:

$$\varphi(x)=\begin{cases} 1 \text{ dla } f(x)=+\infty \\ \dfrac{f(x)}{1+|f(x)|} \text{ dla } -\infty<f(x)<+\infty \\ -1 \text{ dla } f(x)=-\infty, \end{cases}$$

oraz wprowadzam 4 różne definicje pochodnych Diniego w przypadku, gdy $f(x)$ nie jest skończona, mianowicie:

1) określam pochodne Diniego tylko dla tych x_0, w otoczeniu których $f(x)$ jest skończona,

2) tylko dla tych x_0, dla których $f(x_0)$ jest skończona, obliczając ilorazy różnicowe według $f(x_0)-\infty=-\infty, f(x_0)-(-\infty)=+\infty$, $\dfrac{\mp\infty}{h}=\mp\infty$ dla $h>0$ i t. d.

3) dla wszystkich x_0, przyjmuję oprócz poprzednich umowy $\infty-\infty=0$, $(-\infty)-(-\infty)=0$, $\infty-(-\infty)=\infty$, $-\infty-(\infty)=-\infty$.

4) dla wszystkich x_0, mianowicie gdy $|f(x_0)|<\infty$ według definicji 2), zaś gdy $|f(x_0)|=\infty$, jako pochodne Diniego funkcji $\varphi(x)$ w punkcie x_0. (Można by też zamiast $\dfrac{u}{1+|u|}$ użyć do zdefiniowania $\varphi(x)$ innego homeomorfizmu z pochodną ciągłą dodatnią między $(-1, 1)$ a $(-\infty, +\infty)$).

Przy każdej z tych definicji prawdziwe są twierdzenia:

I. Zbiór $\{f'(x)=\infty\}$ jest typu $F_{\sigma\delta}$ miary 0.

II. Gdy $f'(x)$ istnieje wszędzie, to jest 1-szej klasy Baire'a.

III. Zbiór A wszystkich punktów nieróżniczkowalności, w których wszystkie pochodne Diniego są skończone i zbiór B^* punktów, w których nie istnieje pochodna jednostronna, ale wszystkie pochodne Diniego są skończone są $G_{\delta\sigma}$ miary 0.

Oznaczam: $N^{\cdot}$ — zbiór wszystkich punktów, w których nie istnieje pochodna skończona, N — zbiór wszystkich punktów, w których nie istnieje pochodna skończona ani nieskończona, $B^{\cdot}$ — zbiór wszystkich punktów, w których nie istnieje pochodna skończona jednostronna, B — zbiór wszystkich punktów, w których nie istnieje pochodna skończona ani nieskończona jednostronna.

IV. Zbiory $N, N^{\cdot}$ są typu $G_{\delta}+(G_{\delta\sigma}$ miary 0), B jest typu $G_{\delta\sigma}+K^{\cdot}$, gdzie $K^{\cdot}$ składa się z (niektórych) punktów nieciągłości funkcji $f(x)$, $|K^{\cdot}|=0$, $B^{\cdot}$ jest typu $G_{\delta\sigma}$. Jako lemmaty występują twierdzenia o zbiorach $\{\bar{f}^{+}(x)=+\infty\}$, $\{\bar{f}(x)=+\infty\}$, $\{\bar{f}(x)=+\infty\}+\{\underline{f}(x)=-\infty\}$, $\{\underline{f}^{+}(x)=+\infty\}$ — które jednak nie są identyczne dla każdej z umów 1)—4), więc je pomijam.

Nazywam punktem typu X dla $f(x)$ punkt x_0 taki, że $\bar{f}^{+}(x_0)=\bar{f}^{-}(x_0)=+\infty$, $\underline{f}^{+}(x_0)=\underline{f}^{-}(x_0)=-\infty$, punktem typu λ punkt x_0 taki, że po jednej stronie x_0 istnieje pochodna nieskończona, a po drugiej — dwie pochodne Diniego $+\infty$, $-\infty$, punktem typu ∞ punkt x_0 taki, że $|f'(x_0)|=\infty$, punktem typu Y punkt x_0 taki, że $\underline{f}^{-}(x_0)=-\infty$, $\bar{f}^{+}(x_0)=+\infty$, $\bar{f}^{-}(x_0)=\underline{f}^{+}(x_0)=c$, $|c|<\infty$, lub $\underline{f}^{+}(x_0)=-\infty$, $\bar{f}^{-}(x_0)=+\infty$, $\underline{f}^{-}(x_0)=\bar{f}^{+}(x_0)=c$, $|c|<\infty$, wreszcie punktem typu Λ punkt x_0 w którym istnieją obie pochodne jednostronne nieskończone przeciwnych znaków. Jak wiadomo, zbiór punktów typu Λ jest przeliczalny. Wreszcie nazywam punktami typu E punkty x_0 w których spełniony jest jeden z 3 warunków:

a) po jednej stronie dwie pochodne Diniego nieskończone przeciwnych znaków, po drugiej jedna skończona i jedna nieskończona,

b) po jednej stronie istnieje pochodna nieskończona, po drugiej jedna pochodna Diniego jest nieskończona, druga skończona,

c) $\underline{f}^{-}(x_0)=-\infty$, $\bar{f}^{+}(x_0)=+\infty$, $|\bar{f}^{-}(x_0)|<+\infty$, $|\underline{f}^{+}(x_0)|<\infty$ lub $\bar{f}^{-}(x_0)=+\infty$, $\underline{f}^{+}(x_0)=-\infty$, $|\bar{f}^{+}(x_0)|<\infty$, $|\underline{f}^{-}(x_0)|<\infty$.

V. Dla funkcji ciągłej $f(x)$ (niekoniecznie skończonej) zbiór wszystkich punktów typu X jest G_{δ} i jego dopełnienie jest w każdym przedziale mocy kontinuum. Jeśli na pewnym odcinku I zbiór punktów typu X jest pełnej miary, to na każdym odcinku czwartym w I zbiór punktów typu λ lub ∞ jest mocy kontinuum. Jeśli na pewnym odcinku J zbiór wszystkich punktów typu X jest pusty, to zbiór wszystkich punktów typów λ, Y, Λ i E jest na J nigdziegęsty i istnieje zbiór otwarty D gęsty w J taki, że w prawie każdym punkcie $x \epsilon D$ funkcja $f(x)$ ma pochodną skończoną.

Wniosek 1. Nie istnieją funkcje ciągłe, których pochodne Diniego przyjmują w każdym punkcie 3 lub 4 wartości, ani funkcje ciągłe nie mające nigdzie pochodnej jednostronnej,

których pochodne Diniego przyjmują w każdym punkcie 2 lub 4 wartości.

Wniosek 2. Zbiór wszystkich punktów typów λ, Y, Λ, E dla funkcji ciągłej jest 1-szej kategorii.

VI. Dowolny zbiór liczb rzeczywistych jest zbiorem wszystkich punktów typu X dla pewnej funkcji ograniczonej $f(x)$ oraz zbiorem wszystkich punktów typu Y dla pewnej funkcji ograniczonej $g(x)$.

Oznaczenia do twierdzenia VII. Przez M oznaczam zbiór typu G_δ, przez D sumę wszystkich odcinków otwartych, na których M jest pełnej miary, przez J zbiór typu $G_\delta + (G_{\delta\sigma}$ miary 0) spełniający następujące warunki: α) istnieje zbiór M_1 typu G_δ taki, że $M_1 D - M$ jest mocy kontinuum na każdym odcinku zawartym w D, β) $M \subset M_1 \subset J$. γ) istnieje zbiór otwarty $E \subset R - \overline{M}$, gęsty w $R - \overline{M}$, taki że $|EJ| = 0$ (R oznacza zbiór wszystkich liczb rzeczywistych).

VII. Dla każdych zbiorów J, M spełniających warunki wyżej wymienione istnieje funkcja ciągła skończona $f(x)$ mająca pochodną skończoną dla każdego $x \epsilon R - J$, nie mająca pochodnej skończonej ani nieskończonej dla każdego $x \epsilon J$, dla której wszystkie punkty $x \epsilon M$ są typu X, wszystkie punkty $x \bar{\epsilon} M$ są typu różnego od X, a mianowicie w punktach $x \epsilon JD - M$ istnieje najwyżej jedna pochodna jednostronna, zaś punkty $x \epsilon J(R - D) - M$ są typu Y lub wszystkie pochodne Diniego są skończone, ale nie istnieje pochodna jednostronna. Gdy EJ jest pusty i J typu G_δ, istnieje funkcja $f(x)$ spełniająca wszystkie wymienione warunki i ponad to taka, że gdy wszystkie pochodne Diniego w dowolnym punkcie x_0 są skończone, to $f'(x_0)$ istnieje.

Wniosek 3. Istnieją funkcje ciągłe skończone nie mające nigdzie pochodnej skończonej ani nieskończonej jednostronnej (typu Besikowicza), dla których każdy punkt jest typu X lub Y.

Wniosek 4. Dla każdego zbioru J typu $G_\delta + (G_{\delta\sigma}$ miary 0) istnieje funkcja ciągła skończona $f(x)$ mająca pochodną skończoną dla każdego $x \bar{\epsilon} J$, nie mająca pochodnej skończonej ani nieskończonej nawet jednostronnej dla żadnego $x \epsilon J$.

Wniosek 5. Warunkiem koniecznym i dostatecznym dla zbioru wszystkich punktów typu X dla funkcji ciągłej (nawet

skończonej) jest, aby był typu G_δ i miał dopełnienie mocy kontinuum na każdym odcinku.

Stawiam zagadnienia następujące:

1. Scharakteryzować zbiory punktów typów Y, λ, ∞ dla funkcji ciągłej.

2. Czy istnieje funkcja ciągła nie mająca nigdzie pochodnej (nawet nieskończonej) bez punktów typu Y.

3. Czy istnieje funkcja ciągła, której pochodne Diniego przyjmują w każdym punkcie 2 lub 4 wartości.

4. Czy istnieje funkcja ciągła, dla której prawie każdy punkt jest typu X, bez punktów typu λ i ewentualnie bez punktów z pochodną skończoną.

5. Czy warunki wymienione w twierdzeniu IV dla zbiorów B, $B^{\cdot}$ są dostateczne?

Twierdzenia I—IV dla funkcyj skończonych znalazł niezależnie i wcześniej A. Brudno (Mat. Sbor. 13 (55), 1, 1943, rękopis z r. 1941).

13. W. Sierpiński. *Sprawozdanie z podróży naukowej do Francji.*

14. M. Biernacki. *O pochodnej logarytmicznej funkcyj silnie monotonicznych.*

I. Jeśli funkcja $y(x)$ jest dla $x > x_0$ n-krotnie różniczkowalną i spełnia nierówności: $y < 0, y' > 0, \dots, y^{(n-1)} > 0$, $0 < [y^{(n)} : y] \leqslant A(x)$, przy czym $A(x)$ jest dla $x > x_0$ niemalejącą, to dla $x > x_1$ zachodzą nierówności:

$$\frac{y^{(p)}}{y} < n(n-1)\dots(p+1)A^{\frac{p}{n}} \quad (p=1,2,\dots,n-1).$$

Dla $n=2$ i $n=3$ można zaostrzyć wynik powyższy w sposób następujący:

II. Jeśli y, y', y'' są dodatnie w przedziale (a,b) i jeśli zachodzi w nim nierówność:

$$\min\left(\frac{y'}{y}, \frac{y''}{y'}\right) \leqslant [A(x)]^{\frac{1}{2}}$$

przy czym $A(x)$ jest niemalejącą w (a, b) to jest też w tym przedziale:

$$\frac{y'}{y} \leqslant \max\left[\frac{y'(a)}{y(a)}, A^{\frac{1}{2}}\right].$$

III. Jeśli dla $x > x_0$ jest $y > 0$, $y' > 0$, $y'' > 0$ i $y''' = A(x)y$, przy czym jest dla $x > x_0$, $A > 0$, $A' > 0$ zaś wyrażenie $[A' : A]$ jest niemalejące, to dla $x > x_0$, zachodzą nierówności:

$$\frac{y'}{y} \leqslant \frac{y''}{y'} \leqslant \frac{y'''}{y''}, \quad \frac{y'}{y} \leqslant A^{\frac{1}{3}}, \quad \frac{y''}{y} \leqslant A^{\frac{2}{3}}.$$

15. M. Nosarzewska. *O zbieżności jednostajnej funkcyj, których różnice p-tego rzędu są stale nieujemne.*

Niech $\{f_n(x)\}$ oznacza ciąg funkcyi określonych w przedziale otwartym I, wspólnie ograniczonych na jakimś podprzedziale I' przedziału I i mających wszędzie różnice p-tego rzędu nieujemne, gdzie $p \geqslant 2$ jest ustalone dla wszystkich n. Jeśli ciąg $\{f_n(x)\}$ jest zbieżny w każdym punkcie przedziału I, to jest zbieżny niemal jednostajnie i granica jego jest funkcją ciągłą.

16. M. Krzyżański. *O rozwiązaniach równania typu eliptycznego, określonych przez wartości na dwu płaszczyznach równoległych* (zob. artykuł *Sur le problème de Dirichlet pour l'équation linéaire du type elliptique dans un domaine non borné*, Rendiconti dell'Accad. Nazion. dei Lincei, ser. VIII, t. IV, str. 408—416).

17. J. Szarski. *O pewnych nierównościach różniczkowych rzędu 1-szego* (zob. artykuł *Sur certains systèmes d'inégalités différentielles aux dérivées partielles du premier ordre*, Ann. Soc. Polon. Math. t. XXI).

17 a. J. Szarski. *Pewna zależność całek równań różniczkowych cząstkowych rzędu 1-szego od wartości początkowych* (zob. artykuł *Sur certaines inégalités entre les intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, Ann. Soc. Polon. Math. t. XXII).

18. Z. Szmydtówna. *O całkach pierwszych równania różniczkowego* (praca ta ukaże się w t. XXIII Ann. Soc. Pol. de Math. pt. *Sur les intégrales premières de l'équation $y' = f(x, y)$*).

19. A. Ciopa-Śniatyński. *O pewnym równaniu 3-go stopnia.*

20. K. Kuratowski. *Program studium matematyki na uniwersytetach polskich.*

Sekcja B.

1. J. Łukasiewicz. *O zasadzie najmniejszej liczby.*

Referat niniejszy ma cel dwojaki: przedstawić niektóre nowe wyniki z zakresu teorii liczb naturalnych oraz okazać, jak wyglądają w stworzonej przeze mnie symbolice beznawiasowej sformalizowane dowody matematyczne.

Wyniki, które tu przedstawiam są następujące: Dowodzę po pierwsze, że zasada najmniejszej liczby jest na gruncie logiki dedukcyjnie równoważna zasadzie „zstępowania w nieskończoność" Fermata, oraz pewnej formie zasady indukcji matematycznej. Dowodzę powtóre, że z zasady najmniejszej liczby wynika przy pomocy samej tylko logiki niezwrotność stosunku mniejszości.

Wszystkie wywody są podane bez luk i mogą być sprawdzone mechanicznie. Opieram się w nich na następujących trzynastu tezach z teorii dedukcji:

1. Cpp
2. $CCqrCCpqCpr$
3. $CCpNpNp$
4. $CCpNNqCpq$
5. $CCpNqCqNp$
6. $CCNpqCNqp$
7. $CCpqCCqNrCrNp$
8. $CCNpqCCqrCNrp$
9. $CCNpqCCqNrCrp$
10. $CCpCqrCKqpr$
11. $CCpNqNKpq$
12. $CNCpqKpNq$
13. $CNCpNqKqp$.

Zasadę najmniejszej liczby formuluję w następujących znakach:

14. $C\varphi a\Sigma bK\varphi b\Pi cCLcbN\varphi c$.

We wzorze tym litery „a“, „b“, „c“ oznaczają zmienne, reprezentujące liczby naturalne. Wyrażenie „φa“ znaczy „a ma własność φ“, zaś wyrażenie „Lcb“ znaczy „c jest mniejsze od b“. Litery „Π“ i „Σ“ oznaczają kwantyfikatory.

Tezy teorii dedukcji oraz zasada najmniejszej liczby są punktem wyjścia przekształceń, opartych na regułach podstawiania, odrywania i operowania kwantyfikatorami. Te ostatnie reguły wymagają omówienia, ponieważ w postaci przeze mnie używanej nie są powszechnie znane.

Reguła Π1. Przed poprzednikiem implikacji, będącej tezą, można postawić kwantyfikator ogólny, wiążący zmienną wolną, występującą w poprzedniku.

Reguła Π2. Przed następnikiem implikacji, będącej tezą, można postawić kwantyfikator ogólny, wiążący zmienną wolną, występującą w następniku, o ile zmienna ta nie występuje jako wolna w poprzedniku.

Reguła Σ1. Przed poprzednikiem implikacji, będącej tezą, można postawić kwantyfikator szczegółowy, wiążący zmienną wolną, występującą w poprzedniku, o ile zmienna ta nie występuje jako wolna w następniku.

Reguła Σ2. Przed następnikiem implikacji, będącej tezą, można postawić kwantyfikator szczegółowy, wiążący zmienną wolną, występującą w następniku.

Przy pomocy wymienionych reguł wyprowadzam z zasady najmniejszej liczby zasadę „zstępowania w nieskończoność“ Fermata, dająca się wyrazić przy pomocy tez:

$$C\Pi bC\varphi b\Sigma cKLcb\varphi cN\varphi a$$
$$C\Pi bCN\varphi b\Sigma cKLcbN\varphi c\varphi a$$

dalej pewną formę zasady indukcji matematycznej

$$C\Pi bC\Pi cCLcb\varphi c\varphi b\varphi a$$

i wreszcie niezwrotność stosunku mniejszości, tj. tezę $NLaa$. Wykazuję także, że z zasady indukcji wyprowadzić można zasadę najmniejszej liczby.

2. R. Ingarden. *O odwzorowaniu stygmatycznym w mikroskopie elektronowym* (referowana praca w formie rozszerzonej ukaże się w Pracach Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego).

3. T. Banachiewicz. *O rozwiązywaniu układu równań liniowych za pomocą krakowianów.*

Referent wyjaśnia naprzód względne awantaże rachunku przy pomocy krakowianów (oboczność łączonych ze sobą elementów) w porównaniu z rachunkiem macierzowym, i wykłada następnie twierdzenie zasadnicze: każdy niezerowy krakowian a daje się rozłożyć na iloczyn $g \cdot h$ dwóch krakowianów „kanonicznych" (takich, że w każdym wierszu każdego z nich „kończy się" co najmniej jedna kolumna). Ilość wierszy każdego z krakowianów g i h jest inwariantem, tym, co się nazywa *rangą* tabeli. Rozwiązanie układu równań liniowych $x \cdot \tau a = l$ (gdzie x oznacza kolumnę niewiadomych, τ znak transpozy, l kolumnę wyrazów wolnych) — o ile tylko istnieje — dane jest przez równanie $x = (l{:}\tau h){:}g$. Wyznaczniki nie występują wcale w tym rozwiązaniu; wyznacznik układu może być dowolny, równy albo nierówny zeru. Rozwiązanie doskonale się nadaje do rachunku liczbowego i dla układów o więcej niż 3 niewiadomych ruguje w praktyce klasyczne rozwiązanie Cramera przy pomocy wyznaczników.

4. G. Choquet. *Sur un problème de poursuite posé par M. Steinhaus.*

5. E. Čech. *Un problème sur la géométrie différentielle projective.*

6. K. Kuratowski. *Ogólne własności przestrzeni funkcyjnych* (zob. *Sur la topologie des espaces fonctionnels,* Ann. Soc. Pol. de Math. t. XX, str. 314—322).

7. B. Knaster. *O podziale zbiorów na części o mniejszej średnicy.* Prelegent referuje wyniki J. Perkala przedstawione na posiedzeniu Oddziału Wrocławskiego P. T. M. w dniu 28. III. 1947 (zob. Colloquium Mathematicum, t. 1, str. 45) i uzupełnia je przez uwagi własne.

8. T. Ważewski. *Metoda topologiczna badania efektu asymptotycznego w zakresie równań różniczkowych* (por. Rendiconti dei Lincei, seria VIII, t. III, str. 210).

9. R. Sikorski. *Przedłużenie homeomorfizmów w ciałach Boola* (por. artykuł *A theorem on extension of homeomorphisms*, Ann. Soc. Pol. Math. t. 21, str. 332 oraz artykuł *On the representation of Boolean algebras as fields of sets*, Fund. Math., t. 35, str. 255—257).

10. E. Čech. *Espaces bicompacts et H fermés.*

11. J. Leray. *Topologie algébrique.*

12. V. Hlavatý. *Géométrie différentielle des espaces réglés*

13. V. Jarník. *Sur les minima successifs des corps convexes* (por. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky).

14. K. Borsuk. *O pewnych niezmiennikach topologicznych.*

Przekształcenie $y=f(x)$ przestrzeni A na przestrzeń B nazywa się *dwuciągłym*, jeżeli jest ono ciągłe i przy tym takie, że istnieje przekształcenie ciągłe $x=\varphi(y)$ przestrzeni B na podzbiór przestrzeni A spelniające warunek

$$f\varphi(y)=y \quad \text{dla każdego} \quad y\in B.$$

Przekształcenia dwuciągłe posiadają własność *przechodniości*, tj. jeżeli f jest przekształceniem dwuciągłym przestrzeni A na przestrzeń B, a g przekształceniem dwuciągłym przestrzeni B na przestrzeń C, to ich superpozycja gf jest przekształceniem dwuciągłym przestrzeni A na przestrzeń C. Przekształcenia dwuciągłe dają się również określić jako superpozycje przekształceń homeomorficznych i tzw. retrakcji.

Przy przekształceniach dwuciągłych wiele istotnych własności przestrzeni zachowuje się niezmienniczo. Do takich własności należą (prócz niezmienników wszystkich przekształceń ciągłych): *lokalna spójność w dowolnym wymiarze*, *lokalna ściagalność*, *jednosprzęgłość*, *wymiar* $\leqslant n$, *k-wymiarowa liczba Bettiego* $\leqslant n$ i wiele innych. Z tego względu teoria niezmienników przekształceń dwuciągłych stanowi dział topologii zasługujący na specjalną uwagę.

Dokładne przedstawienie wyników podanych w komunikacie znajduje się w pracy: K. Borsuk, *On the Topology of Retracts*, Annals of Mathematics 48 (1947), p. 1082—1094.

15. A. Bielecki. *Pewien warunek konieczny i dostateczny jednolitwości układów równań różniczkowych zwyczajnych.*

O prawych stronach układu równań różniczkowych

$$(1) \qquad \begin{aligned} x' &= f(t, x, y) \\ y' &= g(t, x, y) \end{aligned}$$

zakłada się, że są funkcjami określonymi, ciągłymi i ograniczonymi w obszarze: $0 \leqslant t \leqslant 1$, $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$. Zakłada się ponadto, że krzywa I:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

jest całką układu (1), wychodzącą z początku 0 układu współrzędnych.

Przy tych założeniach krzywa I jest jedyną całką układu (1), wychodzącą z punktu 0 i określoną w przedziale $0 \leqslant t \leqslant 1$, wtedy i tylko wtedy, jeżeli zachodzi następujący warunek:

Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie kontinuum C, że:

1⁰ całka I zawiera się w C i wyłączywszy punkt 0 leży wewnątrz C;

2⁰ C zawiera się w otoczeniu całki I o promieniu ε;

3⁰ istnieją takie dwa stożki obrotowe o wierzchołku 0, których osią jest styczna do krzywej I w punkcie 0, i takie otoczenie tegoż punktu, że lokalnie, w obrębie tego otoczenia jeden ze stożków zawiera się, a drugi jest zawarty w C;

4⁰ część brzegu C, zawarta pomiędzy płaszczyznami $t = 0$ i $t = 1$, jest powierzchnią analityczną;

5⁰ przekroje tej powierzchni płaszczyznami $t = \tau = \text{const}$, gdzie $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, są pojedynczymi krzywymi zamkniętymi, analitycznymi;

6⁰ wszystkie całki układu (1), wychodzące w kierunku rosnących wartości zmiennej t z punktów brzeżnych kontinuum C, wchodzą do wnętrza C.

Jako wystarczający, warunek ten jest niemal trywialnym. Natomiast dowód konieczności warunku jest bardzo skomplikowany, w przeciwieństwie do wypadku jednego równania różniczkowego, gdzie konstrukcja analogicznego kontinuum C nie nastręcza żadnych trudności.

Twierdzenie przenosi się na układ dowolnej większej liczby n równań różniczkowych, jednakże za cenę znacznego osłabienia warunku 5°; a mianowicie można go zastąpić warunkiem:

Kontinuum C jest homeomorficzne z kulą domkniętą $(n+1)$-wymiarową.

Twierdzenie nie zachowuje się jednak już dla trzech równań, jeśli zdanie 5° zostanie sformułowane następująco;

Wnętrze każdego przekroju kontinuum C płaszczyzną prostopadłą do osi t jest zbiorem homeomorficznym z kulą lub jest zbiorem pustym.

Przykład, służący do okazania tego, może już być z łatwością użyty do uzyskania analogicznych wyników negatywnych dla dowolnej większej ilości równań.

Problem rozstrzygnięcia, czy omawiany warunek jest koniecznym i dostatecznym dla jednotliwości układów równań różniczkowych został postawiony przez T. Ważewskiego w r. 1945.

Wszystkie podane tu wyniki pozostają prawdziwymi, jeśli się rozważa zamiast równań różniczkowych zwyczajnych równania paratyngensowe, będące ich uogólnieniem, których teorie zbudował S. K. Zaremba.

16. A. Bielecki. *Pewna własność topologiczna całek układów równań różniczkowych zwyczajnych.*

Rozważamy układ równań różniczkowych zwyczajnych

(1) $$x_i' = f_i(t, x_1, \ldots, x_n), \quad i=1, \ldots, n,$$

którego prawe strony są funkcjami ciągłymi i ograniczonymi w obszarze D określonym przez nierówności

$$0 \leqslant t \leqslant 1, \quad -\infty < x_i < +\infty, \quad -\infty < y_i < +\infty.$$

Zakładamy, że $E \subset D$ jest zbiorem domkniętym i oznaczamy przez Z strefę dodatniej emisji zbioru E, to znaczy zbiór takich punktów $P \in D$, do których docierają całki układu (1), wychodzące z punktów zbioru E dla wartości rosnących zmiennej t. Oznaczamy prócz tego przez Π_0 i Π_1 odpowiednio hiperpłaszczyzny $t=0$ i $t=1$.

Przy tych oznaczeniach zbiory otwarte $D-(Z+\Pi_0+\Pi_1)$ i $(\Pi_0-E)\times s$, gdzie s oznacza przedział otwarty $(0, L)$, zaś $\times$ jest znakiem iloczynu kartezjańskiego, są homeomorficzne.

Rezultat może być zaostrzony w tym sensie, że można ustalić odpowiedniość punktową pomiędzy dwoma omawianymi zbiorami, za pomocą transformacji analitycznej, odwracalnej, o jakobianie różnym stale od zera. Wynik jest ważnym również dla równania paratyngensowego (w sensie S. K. Zaremby), wziętego w miejsce układu (1). W dowodzie znajdują zastosowanie metody rozwinięte w pracy, której dotyczył poprzedni komunikat.

17. St. Gołąb. *O uogólnieniu równań Bonneta-Kowalewskiego* (zob. pracę *Généralisation des équations de Bonnet-Kowalewski dans l'espace à un nombre arbitraire des dimensions*, Ann. Soc. Polon. Math., t. XXII, str. 97).

18. W. Wrona. *Interpretacja geometryczna równania Einsteina w przestrzeni czterowymiarowej*. Odczyt obejmował część wyników zawartych w pracy J. Haantjes, W. Wrona *Über konformeuklische und Einsteinische Räume gerader Dimension*, Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen, Proceedings, t. XLII, 7, 1939.

19. S. Łojasiewicz. *O pewnej własności charakterystycznej spirali logarytmicznej*.

Prof. T. Ważewski postawił następujący problem: kiedy zbiór Z na płaszczyźnie posiada tę własność, że jego obraz poprzez dowolną homotetię jest również jego obrazem poprzez przemieszczenie sztywne?

Oznaczając powyższą własność przez (s) dowodzę następującego twierdzenia:

Warunkiem koniecznym i wystarczającym ażeby zbiór Z domknięty posiadał własność (s) jest, ażeby zbiór ten był (po wyłączeniu punktu (a, b)) sumą spiral logarytmicznych

$$x = a + \lambda e^{kt} \cos t, \quad y = b + \lambda e^{kt} \sin t, \quad \text{gdzie } -\infty < t < +\infty$$

przy czym liczba k i punkt (a, b) są ustalone, zaś λ jest parametrem, przebiegającym zbiór domknięty (liniowy).

Dowód polega na następującej uwadze: jeżeli zbiór Z posiada własność (s), to do każdego $\alpha > 0$ istnieje punkt (a, b) i ψ takie, że gdy $(a + r \cdot \cos\varphi, b + r \cdot \sin\varphi) \in Z$, to również $(a + r\alpha^n \cos(\varphi + n\psi), b + r\alpha^n \sin(\varphi + n\psi)) \in Z$ dla każdego n całkowitego.

SEKCJA DYDAKTYCZNA

1. S. STRASZEWICZ. *O pracach komisji programowej dla szkół średnich.* Prelegent przedstawił ogólne zasady opracowanego przez Komisję Matematyczną programu matematyki w szkołach ogólnokształcących.

2. S. GOŁĄB. *Uwagi o wynikach egzaminu konkursowego z matematyki na Akademii Górniczej.*

3. B. IWASZKIEWICZ. *Cele i zadania nauczania w szkole średniej.*

4. W. KRYSICKI. *Zazębianie się matematyki w szkołach wyższych i liceach.*

5. A. CHROMIŃSKI. *Ekonomia rachunku matematycznego i jego kontrola.*

6. J. BURZYŃSKI. *Metody kontrolne i wykrywanie błędów w sumowaniu, w zastosowaniu do rachunkowości.*

Jedną z podstawowych czynności w rachunkowości jest dodawanie długich kolumn liczb. Dodawanie, tak pamięciowe, jak przy użyciu maszyn liczących lub licząco-piszących jest, względnie powinno być czynnością silnie zautomatyzowaną. Automatyzm ten powoduje zwiększenie wydajności pracy, nie wyklucza jednak błędów, powstających w chwili nieuniknionego, spowodowanego zmęczeniem rozluźnienia uwagi. Usuwanie tych błędów wymaga pracy nieautomatycznej.

Kontrolę bezbłędności dodawania ułatwia tzw. rachunkowość podwójna, w której każdą kwotę notujemy na dwóch różnych kontach, na jednym jako liczbę dodatnią, a na drugim jako liczbę ujemną. Ilekroć z końcem badanego okresu rachun-

kowego, bezwzględna wartość sumy liczb dodatnich różni się od bezwzględnej wartości sumy liczb ujemnych uzyskujemy pewność występowania błędu. Błąd polega zwykle na omyłce popełnionej przy zapisywaniu liczby dodatniej lub liczby ujemnej w odpowiednim koncie lub też na mylnym odczytaniu jednej z tych liczb w chwili dodawania, zaś wielkość błędu lub wypadkowej kilku błędów określa różnica bezwzględnej wartości sumy liczb dodatnich i bezwzględnej wartości sumy liczb ujemnych.

Najczęstszymi błędami popełnianymi przy dodawaniu są: 1) błąd wzrokowy polegający na przestawieniu sąsiednich cyfr, 2) błąd słuchowy [1]), polegający na nierozróżnieniu (zamianie) końcówek „...dzieści(-a)“ względnie „...dziesiąt“ i „...naście“ (w języku niemieckim „...zig“ i „...zehn“, w jęz. francuskim „...ze“ i „...ante“, w jęz. angielskim „...teen“ i „...ty“), 3) przesunięcie kropki dziesiętnej.

Każdy z wymienionych typów błędu posiada w układzie pozycyjnym dziesiętnym cechy cyfrowe umożliwiające szybkie odszukanie źródła błędu. Inne błędy czysto przypadkowe zdarzają się znacznie rzadziej i nie posiadają też określonych cech cyfrowych.

Błąd wzrokowy (przestawienie wzajemne dwu, zwykle sąsiednich cyfr), powodujący zmniejszenie sumy, równa się dziewięciokrotnej różnicy między przedstawionymi cyframi pomnożonej przez 10^n. Błąd słuchowy powodujący zmniejszenie sumy ma sumę cyfr równą 8. Bład przesunięcia kropki dziesiętnej podzielony przez liczbę złożoną z tylu dziewiątek o ile miejsc kropka dziesiętna została przesunięta, daje w wyniku mniejszą z liczb: błędnej i właściwej.

Wypadkowa kilku błędów, z których każdy zmienił inne cyfry sumy daje prócz wymienionych nowe cechy cyfrowe. Jeżeli np. w cyfrach dziesiątek i jednostek sumy został popełniony błąd wzrokowy zwiększający sumę, a w cyfrach jednostek wyższego rzędu popełniono jakikolwiek błąd zmniejszający sumę, to suma cyfr dziesiątek i jednostek wypadkowej równa się 10. Nadto uzupełnienie do stu liczby utworzonej z cyfr

---

[1]) Błąd słuchowy powstaje zatem, gdy zastąpimy liczbę 10 a przez liczbę $10+a$, względnie gdy postąpimy przeciwnie, tj. gdy zastąpimy liczbę $10+a$ przez liczbę 10 a, gdzie a jest liczbą jednocyfrową.

dziesiątek i jednostek wypadkowej równa się dziewięciokrotnej różnicy między przedstawionymi cyframi.

Jeżeli w cyfrach dziesiątek i jednostek sumy popełniono błąd słuchowy zwiększający sumę, a w cyfrach jednostek wyższego rzędu popełniono jakikolwiek błąd zmniejszający sumę, to suma cyfr dziesiątek i jednostek wypadkowej równa się 11.

Wypadkowe dwu błędów, zmieniających te same cyfry sumy daje się dość często i łatwo rozłożyć na błędy składowe. Np. złożenie błędu przesunięcia kropki dziesiętnej z przestawieniem cyfr sąsiednich (przy czym wynik nie zależy oczywiście od tego czy oba błędy wydarzyły się w tej samej liczbie, czy też w dwu różnych liczbach) poznajemy po tym, że wypadkowa błędów jest podzielna przez 9, choć liczby dwucyfrowe tworzone z cyfr sąsiednich nie wskazują na błąd wzrokowy, ani też iloraz wypadkowej przez jedną z liczb 9, 99, 999 itd. nie daje się odszukać wśród liczb dodawanych. Staramy się wtedy wyrugować wynik przestawienia cyfr, dodając lub odejmując kolejne wielokrotności dziewięciu, do liczby utworzonej z tych cyfr wypadkowej, które błąd wzrokowy mógł zmienić.

Drogą rozpatrzenia niewielkiej liczby możliwości można również wykryć złożenie dwu błędów wzrokowych lub dwu błędów słuchowych. Sposób postępowania jest tu łatwy do odgadnięcia. W praktyce rachunkowej możemy więc bardzo często zastąpić żmudne wyszukiwanie błędu przez kolacjonowanie (tj. porównywanie zapisów z dokumentami służącymi im za podstawę) krótką analizą rodzaju błędu, po czym następuje poszukiwanie wśród zapisów jednej określonej liczby, tej mianowicie którą, jak to wynika z analizy, wpisano błędnie.

7. Z. Krygowska. *Uwagi o zagadnieniu ścisłości w nauce geometrii elementarnej.*

W związku z programem geometrii dedukcyjnej w szkole średniej nasuwa się zagadnienie, w jakich granicach można uzyskać w nauczaniu geometrii ten stopień ścisłości, jaki obowiązuje w przeciętnym naukowym wykładzie.

1. Ważnym — obok innych — celem nauczania geometrii dedukcyjnej jest zaznajomienie ucznia z procesem dowodzenia, przyzwyczajenie go do tego, że intuicja i doświadczenie po-

winno podlegać kontroli rozumowania. To zadanie dydaktyczne wiąże się w praktyce ze stosowaniem możliwie dużej ścisłości w nauczaniu geometrii. Z drugiej strony nużenie ucznia zbyt drobiazgowymi rozumowaniami, dotyczącymi własności oczywistych, jest sprzeczne z podstawowymi zadaniami dydaktycznymi. Za celowy więc dla szkoły układ aksjomatów geometrii trzeba uznać taki układ, który umożliwia zharmonizowanie dwóch tendencji: dążenia do ścisłości i możliwie najbardziej naturalnej dedukacji.

2. W związku z tymi zagadnieniami zanalizowano kilka typowych dla geometrii szkolnej definicji i rozumowań. Omówiono definicje kąta, scharakteryzowano trudności z nimi związane. Wykazano, że przyjęcie pewnych definicji kąta i stosowanie podstawowych jego własności prowadzi do tego, że aksjomat V Euklidesa nie jest niezależny od poprzedzających go twierdzeń wbrew uwagom podanym w podręcznikach. Wykazano dalej, że planimetria szkolna w ujęciu dotychczasowym jest wyłącznie nauką o przystawaniu; nawet bardzo istotne przesłanki dotyczące położenia są w dowodach pomijane, twierdzenia o położeniu są nieraz formułowane niepoprawnie.

3. Uwzględnianie jednak w dowodach szkolnych tych przesłanek jest bardzo trudne, często praktycznie niemożliwe. Występuje tu duża różnica natury psychologicznej w rodzaju oczywistości i trudności dowodzenia twierdzeń o przystawaniu z jednej i twierdzeń o położeniu z drugiej strony. Uczeń uważa nawet proste dowody, dotyczące przynależności i uporządkowania za trudne i nie rozumie ich potrzeby; tych trudności na ogół nie ma, jeżeli chodzi o przystawanie. Na wytworzenie tej różnicy wpływa fakt, że doświadczalne sposoby sprawdzania tych własności są zasadniczo odmienne (dla ucznia pomiar i bezpośrednie widzenie).

4. Własności uporządkowania i przynależności są niezmiennikami tych „zniekształceń" figury dowodowej, które uczeń stosuje przy rysunku odręcznym w czasie rozumowania; nie zachodzi to dla własności przystawania. Analiza rysunku ucznia rzuca światło na trudności omówione w punkcie 3.

5. Ażeby zatem zadość uczynić wymaganiom dydaktycznym sformułowanym w punkcie 1, należy oprzeć nauczanie geometrii w szkole na takim układzie aksjomatów, aby przy

ścisłym i poprawnym wykładzie można było rozważania, dotyczące położenia zredukować do minimum. Dotychczasowe jednak ujęcie geometrii szkolnej było modyfikacją i uproszczeniem systemu Hilberta. W tym układzie definicje pojęć, do których odnosi się nauka o przystawaniu (odcinek, kąt, wielokąt) związane są ściśle z aksjomatami przynależności i uporządkowania. Te ostatnie stanowią więc istotne przesłanki dowodowe dla twierdzeń o przystawaniu. Nie można więc w tym układzie wydzielić dostatecznie wielu twierdzeń o przystawaniu, na przykładzie których można by uczyć poprawnego dowodzenia bez rozważań o położeniu.

6. W szkolnym systemie geometrii opartym na układzie Hilberta nie możemy więc osiągnąć tego stopnia ścisłości, jaki charakteryzuje normalny naukowy wykład. Jest to możliwe w odniesieniu tylko do tych fragmentów rozumowania, które polegają na czystych wnioskowaniach o przystawaniu. Nasuwa się zagadnienie, czy nie można by osiągnąć lepszych wyników, odrywając się od schematu Hilberta.

8. A. Turowicz. *O układach równań drugiego stopnia o dwu niewiadomych, rozwiązalnych przy pomocy równania kwadratowego o jednej niewiadomej* (por. artykuł w „Matematyce", rocznik II, nr 2 (4), 1949, str. 25—30).

9. J. Leśniak. *O równoważności równań.*

10. S. Hławiczka. *Realizacja arytmetyki liczb względnych w oparciu o relacjonalną teorię arytmetyki na poziomie szkoły średniej.*

Na gruncie relacjonalnej teorii arytmetyki da się sformułować w sposób uproszczony intuicyjnie określenie dodatniej liczby mianowanej jako wielokrotności kroku oraz ujemnej jako wielokrotności odwrotnego kroku. Określenie to da się stosować na poziomie szkoły średniej i podstawowej do wyjaśnienia istoty liczb względnych, działań w ich zakresie oraz do uzasadnienia formalnego wykonywania tych działań.

11. A. Chromiński. *Niektóre proste aparaty rachunkowe.*

Termin zwrotu lub zgłoszenie prolongaty.